

ELEVHEFTE  
Naturfag & Matematikk

# Triangulering av nordlys

Læringsressurs for videregående skole

NTB scanpix  
Foto: Stein Bjørge

## Kort om aktiviteten

Triangulering er en teknikk som har vært mye brukt i samfunnet, blant annet til måling av høyden til nordlyset. Historisk sett har metoden vært svært viktig, særlig i landoppmåling. I dag brukes triangulering i satellittbaserte målinger, f.eks. i Global Navigation Satellite System (GNSS). Derfor er det nyttig å vite om, forstå og kunne bruke triangulering som metode.

## Læringsmål

- Lære hva triangulering er og hvordan dette kan brukes til å gjøre målinger over store avstander
- Lære hvordan triangulering blir brukt som metode for å måle høyden til nordlyset
- Øvelse i trigonometri

## Innhold

Kort om aktiviteten.....	1
Læringsmål.....	1
Introduksjon.....	2
Triangulering i romfysikken .....	2
Metoden .....	3
Aktivitet 1: To-punkts triangulering .....	4
Aktivitet 2: Utledning av uttrykk.....	5
Aktivitet 3: Mål høyden på en bygning.....	6
Kildehenvisninger .....	8
Bilder .....	8
Vedlegg 1: Tabell med sinusverdier .....	9
Vedlegg 2: Bruk av gradskive.....	10
Vedlegg 3: Tabell til aktivitet 3.....	11
Kildehenvisninger .....	12

## Introduksjon

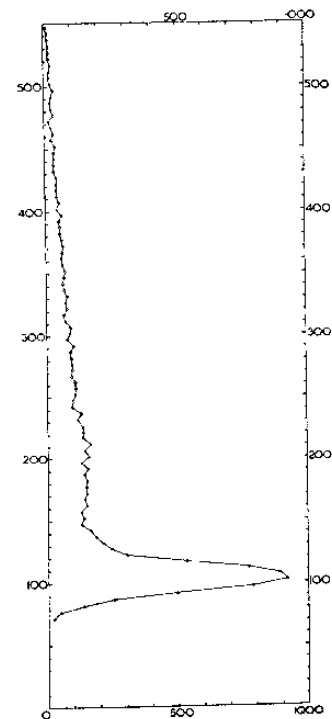
Triangulering er en gammel, vitenskapelig metode for å måle avstander og posisjoner basert på fjernmåling. Et eksempel er å måle avstanden til en øy ute i havet, uten mulighet for å faktisk dra til øya og gjøre målingen direkte ved å dra et måleinstrument ut dit. Hele grunnideen er at man tar målinger ved to (eller flere) steder man har tilgang til, f.eks. langs en kystlinje, og så måler vinkelen mellom linjestykket mellom de to punktene og øya man vil finne avstanden til. Ved hjelp av matematikk kan man nå regne seg til avstanden ut til fjernpunktet (øya i dette eksempelet). Dette var teknikken som ble brukt til å måle høyden til Mount Everest før folk kom seg opp til toppen. Man hadde flere referansepunkter rundt fjellet som man visste posisjonen til med høy nøyaktighet, så ved å måle forskjellige vinkler kunne man kalkulere posisjonen til toppen.

Avstandsmålinger man gjør i den virkelige verden blir aldri 100% nøyaktig. Ved å gjøre flere enn to målinger, som er et minimum, kan man finne gjennomsnittet til alle målingene for å forbedre nøyaktigheten. Denne teknikken forutsetter at alle målingene blir gjort med like god nøyaktighet i seg selv.

## Triangulering i romfysikken

I tiden hvor Kristian Birkeland, Norges første nordlysforsker, begynte sine målinger av nordlyset visste man svært lite om nordlyset. Man visste ikke hva som skapte nordlyset, og man visste heller ikke i hvilken høyde det forekom. Man hadde på denne tiden, i 1890-1910, få metoder på å gjøre nordlysforskningen. Man visste at nordlyset ikke kunne være reflektert fra noe i atmosfæren, men måtte bli skapt der man så det, i himmelen over. Grunnen til dette var at man kunne måle at lyset ikke var polarisert.

Forskerne, med Birkeland i spissen, anså triangulering som det beste alternativet til å måle høyden i nordlyset på. De lagde to observatorier på toppen av fjell i det nordlysrike Finnmark med telefonlinje mellom de to observatoriene, så de kunne synkronisere målinger. Observatoriene var bare 3.4 km unna hverandre og egnet seg dårlig til triangulering. Det var senere når også Carl Størmer, en annen kjent og viktig nordlysforsker, jobbet med Birkeland at man fikk en rekke, gode trianguleringsdatapunkter fra flere observatorier. Dette var nok til å gjøre en statistisk beregning av posisjonen til nordlyset. Se figur 1 for den originale figuren Størmer lagde basert på sine egne beregninger/observasjoner. Sammenlikner man dette



**Figur 1: Størmers høydemålinger**

med den beregnede høydedistribusjonen brukt ved mer moderne og mer nøyaktige målinger så er trianguleringsmålingene overraskende gode!

I denne oppgaven skal vi selv prøve å regne ut et punkt, som vi kan late som er nordlyset på himmelen, med bruk av den enkle teknikken triangulering.

## Metoden

Figur 2 illustrer vinkler og avstander for metoden. Vi gjør målinger fra de to punktene  $A$  og  $B$ . Disse kan være vilkårlig valgt, men avstanden mellom dem,  $AB$ , burde være passe sett i forhold til avstanden  $d = CD$ . I den rettvinklede trekanten  $ACD$  er avstanden  $AD$  gitt som  $AD = \frac{d}{\tan \alpha}$ .

Vil vi ha det samme for avstanden  $BD$  i trekanten  $BCD$  med vinkel  $\beta$ . Derfor vil avstanden  $AB$  være gitt som summen av disse:

$$AB = AD + BD = \frac{d}{\tan \alpha} + \frac{d}{\tan \beta} = d \left( \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right)$$

Om vi nå bruker de trigonometriske identitetene  $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  og  $\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x) = \sin(x + y)$ , så får vi

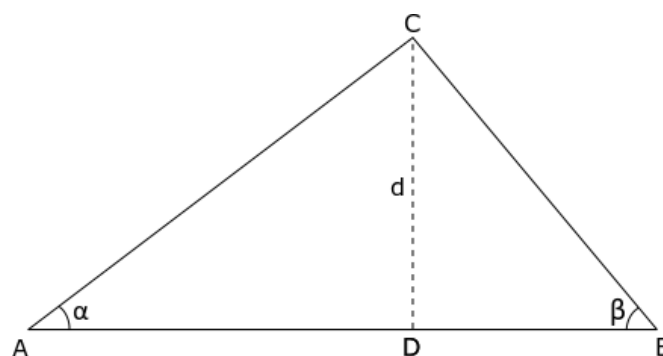
$$AB = d \left( \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \right)$$

$$AB \sin(\alpha) \sin(\beta) = d(\cos(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\alpha)) = d \sin(\alpha + \beta)$$

Til slutt ender vi dermed opp med uttrykket vi skal bruke i denne oppgaven, som er:

$$d = AB \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Vi ser at når vi har gitt to punkter og vi vet avstanden mellom dem, så er alt vi trenger å gjøre og måle vinklene  $\alpha$  og  $\beta$  for å finne avstanden  $d$  til et tredje punkt (her kalt  $C$ ).



Figur 2: Vinklene, posisjonene og lengdene i bruk ved enkel triangulering

## Aktivitet 1: To-punkts triangulering

Denne oppgaven kan gjøres praktisk ved å sette opp en punkt C, og deretter punkt A og B og måle avstanden mellom dem, samt vinklene, eller du kan bare ta utgangspunkt i målene som er gitt i oppgave a).

### Utstyr:

- Målebånd
- Kalkulator eller liknende verktøy

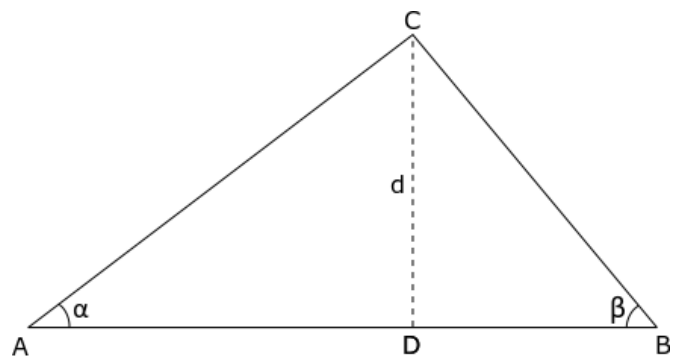
- a) Figur 3 viser en tenkt situasjon der du skal finne avstanden,  $d$ , fra punktet C til AB ved hjelp av triangulering

Etter å måle vinklene og avstanden AB finner du at

$$\angle \alpha = 45^\circ$$

$$\angle \beta = 61^\circ$$

$$AB = 19 \text{ km}$$



Figur 3: Vinklene, posisjonene og lengdene i bruk ved enkel triangulering

Ved hjelp av disse vinklene kan du beregne avstanden,  $d$ , ved hjelp av uttrykket

$$d = AB \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Merk at dette er avstanden mellom punktet og det nærmeste stedet på linjen mellom de to punktene du målte. Dette punktet, D, på denne linjen er vilkårlig og har lite å si i denne sammenhengen.  $CD \perp AB$

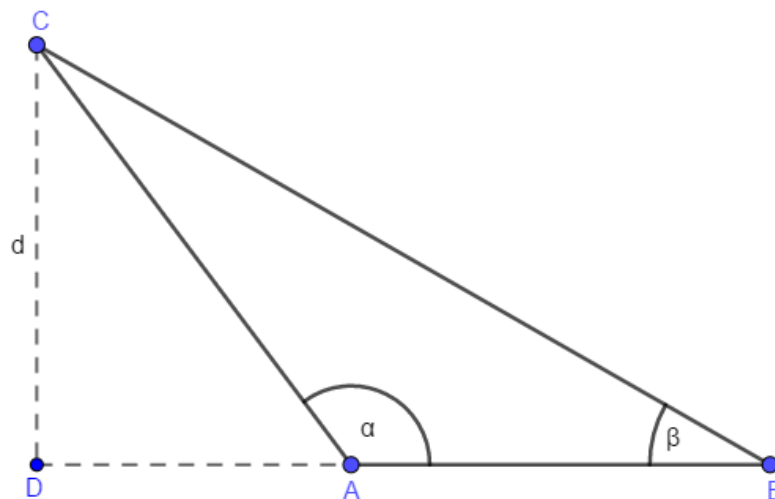
- b) Vi skal nå utvide dette noe. Finn en eller flere andre punkter på den samme linjen som du brukte i oppgave a, og mål vinklene. Du vil dermed kunne kalkulere flere mål for avstanden  $d$ , som i prinsippet burde være samme avstand. Pga. målefeil (som alltid vil forekomme) vil de likevel variere noe. Hvor mye varierer de forskjellige avstandene du kommer frem til, og hva er den gjennomsnittlige avstanden?

## Aktivitet 2: Utledning av uttrykk

I aktivitet 1 fikk du oppgitt uttrykket for å regne ut avstanden,  $d$ .

$$d = AB \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

- a) Bruk figur 3 og det du kan om trigonometri til å utlede dette uttrykket.
- b) Punktet D ligger i skjæringspunktet mellom  $d$  og linjen gjennom punktene  $A$  og  $B$ . I figur 3 ser vi at dette punktet ligger mellom observasjonspunktene  $A$  og  $B$ . Tenkt deg nå at punktet  $D$  ikke ligger mellom disse observasjonspunktene, se figur 4. Undersøk nå om uttrykket for,  $d$ , fortsatt er gyldig for disse tilfellene.



**Figur 4: Når punktet D ikke ligger mellom observasjonspunktene**

## Aktivitet 3: Mål høyden på en bygning

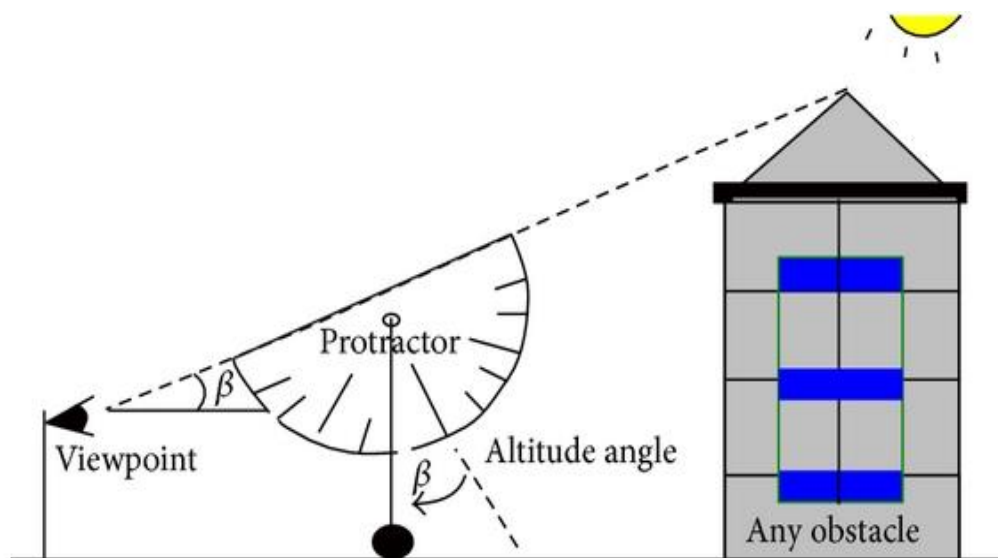
Om du ønsker litt frisk luft, kan du jo nå gå ut å måle høyden på huset/bygget der du bor.

### Utstyr

- Målebånd
- Gradskive
- Hyssing
- Lodd – eller noe annet med litt tyngde (en stein kan også fungere)

Til denne oppgaven trenger du en vinkelpistol. En vinkelpistol er noe de fleste ikke har hjemme, men du kan lage en selv med gradskive, hyssing og ett lodd – se hvordan du lager den i vedlegg 2.

Ta med deg målebånd og din selvlagede vinkelpistol ut. Mål opp en lengde fra veggen du ønsker å måle høyden på, forslag til lengde kan være 3, 5 eller 10 meter, dette blir nå ditt observasjonspunkt. Nå kan du bruke vinkelmåleren din til å måle vinkelen fra observasjonspunktet ditt til toppen av huset. Se figur 5.



**Figur 5: Hvordan bruke gradskive for å måle høyde.**

a) Nå som du har gjort alle målene kan du regne ut høyden på huset. Bruk at

$$H = x \cdot \tan (v)$$

Der  $H$  er høyden du skal finne,  $x$  er avstanden fra veggen til observasjonspunktet ditt og  $v$  er vinkelen du måler.

Merk at dersom du står når du måler vinkelen, må avstanden fra bakken og opp til siktepunktet ditt (øynene dine) legges til for å få rett høyde.

Denne videoen gir en nærmere beskrivelse av metoden:

<https://www.youtube.com/watch?v=FzbLEAlnK3A>

- b) Kan du finne flere måter å beregne høyden på, uten å måle den direkte? Forklar.



## Kildehenvisninger

- Innholdet er utviklet av NAROM for Nordic ESERO

## Bilder

- Forsidebilde: hentet fra ndla.no (mars 2020). Lisens: CC-BY-NC-4.0, Fotograf: Stein Bjørge
- Figur 1: Størmers høydemålinger
- Figur 5: Hvordan bruke gradskive. Hentet (august 2019) fra researchgate: [https://www.researchgate.net/figure/Using-a-protractor-and-plumb-to-measure-altitude-angle-for-any-obstacles-such-as\\_fig7\\_271730479](https://www.researchgate.net/figure/Using-a-protractor-and-plumb-to-measure-altitude-angle-for-any-obstacles-such-as_fig7_271730479)  
Lisens: CC BY 3.0

## Vedlegg 1: Tabell med sinusverdier

På enkelte, lavere klassetrinn så har ikke elevene fått et forhold til trigonometriske funksjoner. Likevel egner denne øvelsen seg godt, da de likevel kan sette inn tall i sinusfunksjonen og ikke nødvendigvis gå dypere inn i hva sinusfunksjonen er. For å gjøre denne overgangen enda litt enklere, så har vi her laget en tabell som viser sinusverdien for forskjellige vinkler mellom 0 og 90 grader.

Husk at dette er alle verdiene man trenger å vite for hele 360 grader. Dette er fordi  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$  som dekker 3. og 4. kvadrant. F.eks. er  $\sin(-90^\circ) = -\sin(90^\circ) = -1$ . Samtidig vil  $\sin(\theta) = \sin(180^\circ - \theta)$  gjelde og dekker dermed 2. kvadrant.

Vinkel i grader	sin(vinkel)
0	0
5	0.0872
10	0.1736
15	0.2588
20	0.3420
25	0.4226
<b>30</b>	<b>0.5000</b>
35	0.5736
40	0.6428
<b>45</b>	<b>0.7071</b>
50	0.7660
55	0.8192
<b>60</b>	<b>0.8660</b>
65	0.9063
70	0.9397
75	0.9659
80	0.9848
85	0.9962
<b>90</b>	<b>1</b>

## Vedlegg 2: Bruk av gradskive

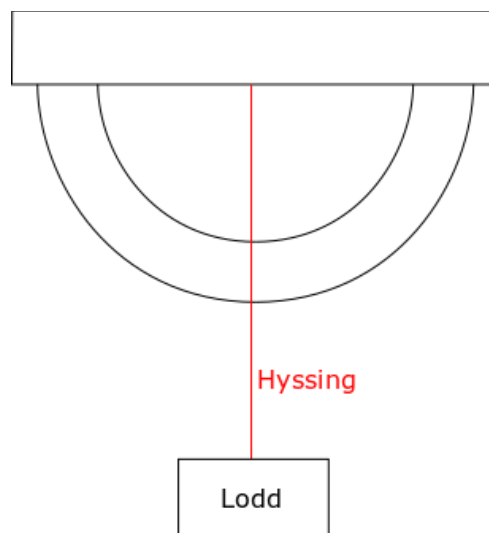
En vinkelpistol er en slags gradskive med en skive utenfor med et tungt punkt, hvor man trykker inn en knapp på en slags pistolliknende holder hvor denne tunge skiven med en pil henger løst. Om man så løfter vinkelpistolen oppover vil denne skiven rotere rundt «gradskiven», og når man da slipper knappen vil denne løsthengende skiven låses. Siden den roterende skiven hadde et tungt punkt på seg vil alltid dette punktet henge ned, og når den låses vil man kunne lese vinkelen pistolen hadde fra horisontalen.

Ikke alle skoler har tilgang til denne, men man kan lage en enklere versjon ved bruk av gradskive, litt hyssing og en stein eller liknende som fungerer som lodd. Fest et lodd i den ene enden av hyssingen og teip fast andre enden i gradskiven, slik at hyssingen fritt kan rotere om origo på gradskiven. Når man så løfter gradskiven opp med en vinkel fra horisonten, vil hyssingen kunne vise vinkelen man holder den rette siden på gradskiven i forhold til horisonten da hyssingen alltid peker ned mot jordas senter. Se figur 6. Man kan også feste et sugerør eller liknende på den rette linjen på toppen av gradskiven, for å gjøre det enklere å sikte på objektet man måler høyden til.

Se video her for en bedre beskrivelse:

<https://www.youtube.com/watch?v=1i6nB6yJkZI>

<https://www.youtube.com/watch?v=FzbLEAlnK3A>



**Figur 6: Gradskive til å måle vinkel på i feltarbeider**

## Vedlegg 3: Tabell til aktivitet 3

Her er eksempel på en tabell til bruk i oppgave 3. Her har man tatt utgangspunkt i at elevene har målt vinkelen fra 3 meter, 5 meter eller 10 meter og de tre siste kolonnen gir høyde for disse avstandene.

De tre siste kolonnene er beregnet ut fra formelen under:

$$H = x \cdot \tan(\alpha)$$

der  $H = \text{høyde}$ ,  $x = \text{avstand til observasjonspunkt (langs bakken)}$  og  $\alpha = \text{vinkel}$

Vinkel i grader	Høyde i meter, målt fra 3 meters hold	Høyde i meter, målt fra 5 meters hold	Høyde i meter, målt fra 10 meters hold
0	0,00	0	0,00
5	0,26	0,44	0,87
10	0,53	0,88	1,76
15	0,80	1,34	2,68
20	1,09	1,82	3,64
25	1,40	2,33	4,66
30	1,73	2,89	5,77
35	2,10	3,50	7,00
40	2,52	4,20	8,39
45	3,00	5,00	10,00
50	3,58	5,96	11,92
55	4,28	7,14	14,28
60	5,20	8,66	17,32
65	6,43	10,72	21,45
70	8,24	13,74	27,47
75	11,20	18,66	37,32
80	17,01	28,36	56,71
85	34,29	57,15	114,30

## Kildehenvisninger